

## 7.2 EFFEKT TYPER OG ARBEID I VEKSELSTRØM

### AKTIV EFFEKT OG ARBEID I EN IDEELL RESISTANS

En ideell resistans som tilkoples en vekselspenning utvikler arbeid i form av varme.

**Det er bare resistans som gir arbeid eller aktiv effekt vi kan nyttegjøre oss som f.eks mekanisk effekt ut på akslingen fra en elektrisk motor.**

I vekselstrøm kalles den effekten vi kan nyttegjøre oss av i form av varme fra en panelovn eller mekanisk effekt på akslingen til en elektrisk motor for *aktiv effekt*.

Arbeid i en ideell resistans:

$$W = I^2 \cdot R \cdot t \quad 7.2.1$$

Arbeid i en ikke ideell resistans:

$$W = U \cdot I \cdot t \cdot \cos \varphi \quad 7.2.2$$

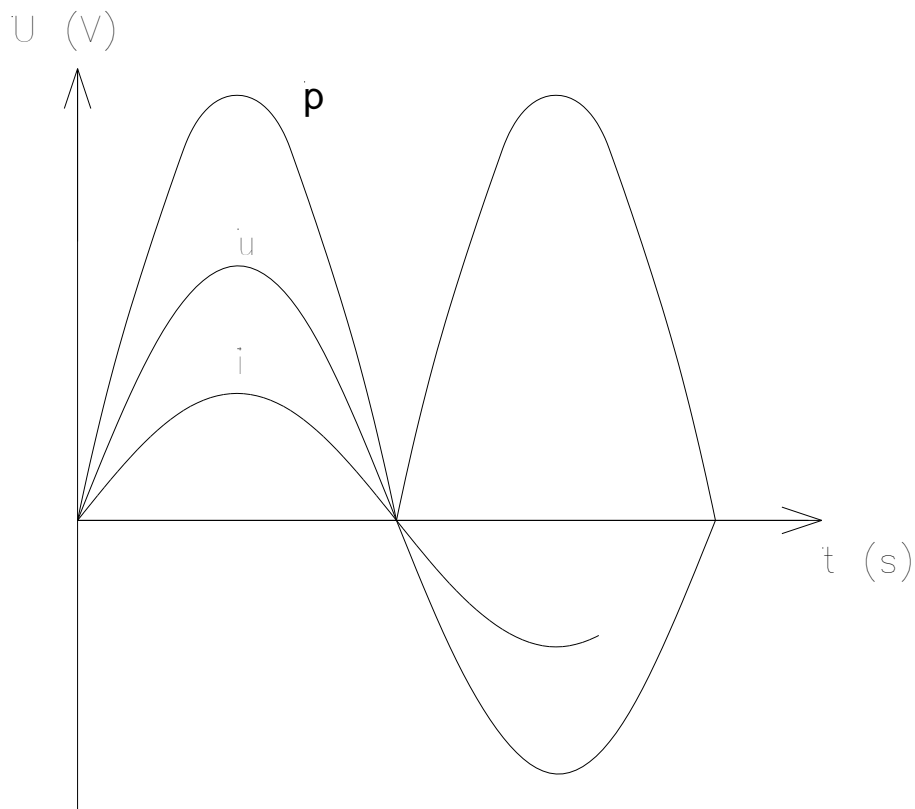
Aktiv effekt er arbeid pr tidsenhet:

$$P = \frac{I^2 \cdot R \cdot t}{t}$$

$$P = I^2 \cdot R \quad 7.2.3$$

W	arbeid (J)
P	aktiv effekt (W)
I	strømmen gjennom resistansen (A)
R	resistansen ( $\Omega$ )
t	tiden arbeidet varer (s)

Figur 7.2.1



Ved å multiplisere strøm og spenning for en ideell resistans får vi aktiv effekt. Figur 7.2.1 viser sammenheng mellom strøm, spenning og effekt.

Effektkurven i figur 7.2.1 kan konstrueres med øyeblikksverdiene av strøm og spenning etter formelen:

$$p = u \cdot i$$

eller:

$$p = U_{maks} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot I_{maks} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

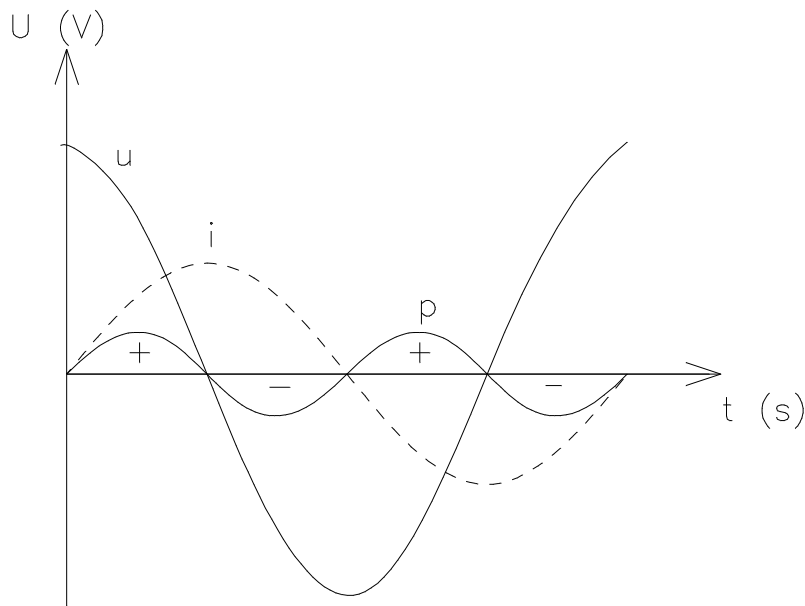
## AKTIV EFFEKT I EN IDEELL SPOLE OG EN IDEELL KONDENSATOR

Det blir ingen aktiv effekt i en ideell spole eller ideell kondensator.

Strøm og spenning vil motvirke hverandre slik at arealet som er produktet mellom strøm og spenningskurven blir null fordelt på en periode.

De to arealene av effektkurven er like, men motsatt rettet for en periode. Dvs at arealene motvirker hverandre og blir til sammen null.

Figur 7.2.2



Figur 7.2.2 viser en kurve for en ideell spole. Kurven blir nesten lik for en ideell kondensator, men strøm og spenningskurven bytter plass.

Matematisk kan vi sette opp et uttrykk for det arbeid f.eks en ideell spole utvikler:

$$W = \int_0^T u \cdot i \cdot dt$$

Øyeblikkseffekten for en ideell spole:

$$p = I_{maks} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot U_{maks} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

uttrykket over kan også settes på formen:

$$I \quad p = I_{maks} \cdot U_{maks} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Fra matematikken vet vi:

$$\sin(2 \cdot \omega \cdot t) = 2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

eller:

$$\text{II} \quad \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) = \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Setter vi uttrykk II inn i I:

$$\text{I+II} \quad p = \frac{1}{2} \cdot I_{maks} \cdot U_{maks} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

Vi kan også finne effektivverdien av uttrykket over:

$$P = \frac{1}{2} \cdot I_{maks} \cdot \sqrt{2} \cdot U_{maks} \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

Dette gir:

$$P = I \cdot U \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

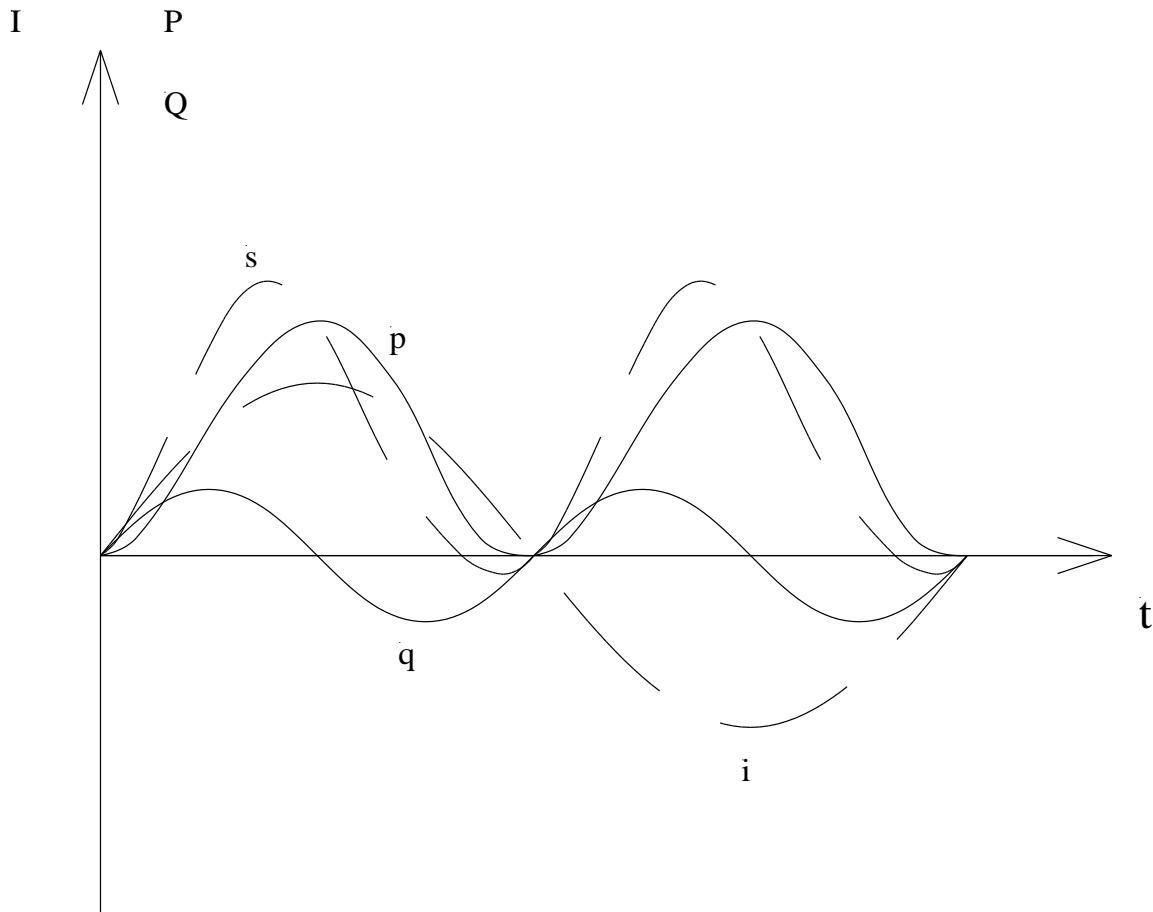
Uttrykket over viser at sinuskurven effekten representerer har dobbelt frekvens av en vanlig sinuskurve. Dette gjør at sinuskurven til effekten har en frekvens på 100 Hz når strømmen og spenningen har en frekvens på 50 Hz.

Setter vi inn verdier i uttrykket over får vi en kurve for den aktive effekten P som i figur 7.2.2. For en ideell spole blir den aktive effekten null, fordi arealene over og under nullstreken vil oppheve hverandre.

### EFFEKTENE I EN IKKE IDEELL SPOLE

I en ikke ideell spole vil det være en liten aktiv effekt pga resistansdelen i spolen. I tillegg til den aktive effekten **P** oppstår det en teoretisk effekt, reaktiv effekt **Q** og en tilsynelatende effekt **S**. Ved å addere aktiv og reaktiv effekt får en tilsynelatende effekt. Se figur 7.2.3.

Figur 7.2.3



Matematisk kan vi sette opp et uttrykk for tilsynelatende effekt for en ikke ideell spole:

$$I \quad s = \frac{1}{T} \int_0^T I_{maks} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot U_{maks} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \cdot dt$$

Uttrykket over kan splittes opp slik at vi får et integral for aktiv effekt og ett for den reaktive effekten:

$$II \quad s = \frac{1}{T} \int_0^T I_{maks} \cdot U_{maks} \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_0^T I_{maks} \cdot U_{maks} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2} \cdot dt$$

Løser vi uttrykket over får vi av første integral formelen under for aktiv effekt **P** og det andre integralet gir oss reaktiv effekt **Q**:

$$p = \frac{U_{maks} \cdot I_{maks}}{2} \cdot \cos \varphi$$

Setter vi inn verdier for å finne en kurve for den aktive effekten kan vi sette den inn i f.eks figur 7.2.3. Figur 7.2.3 viser kurve for aktiv effekt.

Formelen over uttrykt via effektivverdier:

$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos \varphi} \quad 7.2.4$$

Aktiv effekt for en ikke ideell spole:

$$\boxed{P = I^2 \cdot R} \quad 7.2.3$$

P	Aktiv effekt i spolen (W)
U	spenningen (V)
I	Strømmen (A)
cosφ	effektfaktor
R	resistansdel i spolen (Ω)

## REAKTIV EFFEKT

Reaktiv effekt er effekten i den ideelle delen av en spole eller kondensator. Reaktiv effekt er en teoretisk effekt som oppstår på nettet pga induktiv eller kapasitiv virkning.

Formelen under er hentet fra likning **II** under kapittel 7.2 «Effekten i en ikke ideell spole»:

$$s = \frac{1}{T} \int_0^T I_{maks} \cdot U_{maks} \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_0^T I_{maks} \cdot U_{maks} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2} \cdot dt$$

Siste ledd i uttrykket over gir oss reaktiv effekt **Q**. Løser vi siste integral av uttrykket over får vi:

$$q = \frac{U_{maks} \cdot I_{maks}}{2} \cdot \sin \varphi$$

Setter vi inn verdier for uttrykket over inn i figur 7.2.3 får vi en kurve for den reaktive effekten. Kurve for den reaktive effekten er vist i figur 7.2.3.

Formelen over uttrykt via effektivverdier:

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi} \quad 7.2.6$$

Q reaktiv effekt (VAr) (voltamper reaktiv)  
 $\varphi$  faseforskyvningsvinkelen

Ved å sette inn verdier i uttrykkene over får vi kurvene i figur 7.2.3.

Formel for å finne aktiv effektkurve til en ikke ideell spole (del av formel II):

$$p = I_{maks} \cdot U_{maks} \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2(\omega \cdot t)$$

Formel for å finne reaktiv effektkurve til en ikke ideell spole (del av formel II):

$$q = I_{maks} \cdot U_{maks} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2}$$

**TILSYNELATENDE EFFEKT**

Tilsynelatende effekt er produktet mellom strøm og spenning i vekselstrøm. Dette kommer fram av uttrykket:

$$s = \frac{1}{T} \int_0^T I_{maks} \cdot U_{maks} \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_0^T I_{maks} \cdot U_{maks} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2} \cdot dt$$

Tidligere har vi løst integralene i uttrykket over. Vi fikk da effektivverdiene av aktiv effekt **P** og reaktiv effekt **Q**.

$$S = U \cdot I \cdot \cos \varphi + U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

Av uttrykket over ser vi at første ledd er  $90^\circ$  i forhold til andre ledd. Vi har også tidligere funnet ut at den aktive effekten er i fase med strømmen for en spole. Dette ser vi av formelen:

$P = I^2 \cdot R$ . Dette gir oss:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

eller:

$$\bar{S} = P + jQ$$

Tilsynelatende effekt blir argumentet og har samme vinkel ut fra den reelle aksene som spenningen for en spole. Vi for da uttrykket for tilsynelatende effekt uttrykt via effektivverdiene til strøm og spenning:

:

$$\boxed{S = U \cdot I}$$

7.2.5

**S** tilsynelatende effekt (VA)

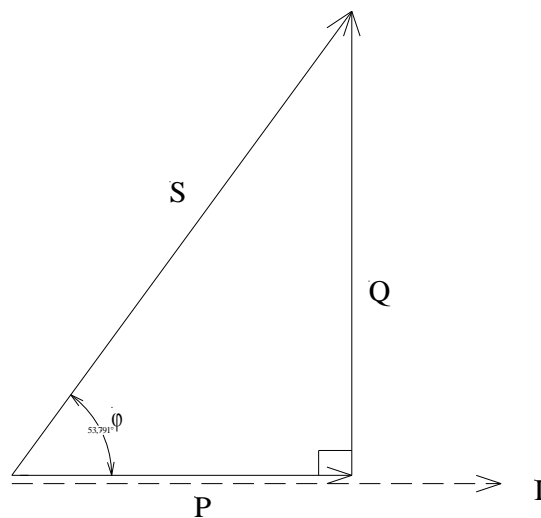


Tilsynelatende effekt er en teoretisk effekt som vi ikke kan nyttegjøre oss av, men som oppstår pga komponenter med kapasitiv eller induktiv virkning.

Effektene i figur 7.2.3 kan uttrykkes ved hjelp av vektorer. Det er vanlig å benytte effektivverdier ved vektorregning.

Aktiv effekt  $P$  og reaktiv effekt  $Q$  fra figur 7.2.1 er  $90^\circ$  faseforskjøvet. Dette gir følgende effekt trekant:

Figur 7.2.4

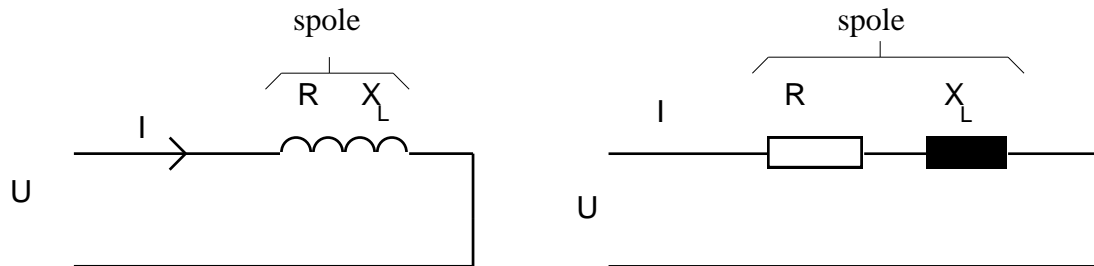


Effekttrekanten i figur 7.2.4 har samme faseforskyvningsvinkel  $\varphi$  og forhold som spenningstrekanten (figur 7.1.8) og impedanstrekanten (figur 7.1.9).

## SAMMENHENG MELLOM IMPEDANS, SPENNING OG EFFEKTTREKANTENE FOR EN IKKE IDEELL SPOLE

For å se på sammenheng mellom impedans, spenning og effekttrekantene benytter vi en ikke-ideell spole. En ikke-ideell spole er resistansdel og induktiv reaktansdel seriekoplet. Seriekoplingen er teoretisk for lettere å kunne beregne impedansen.

Figur 7.2.5

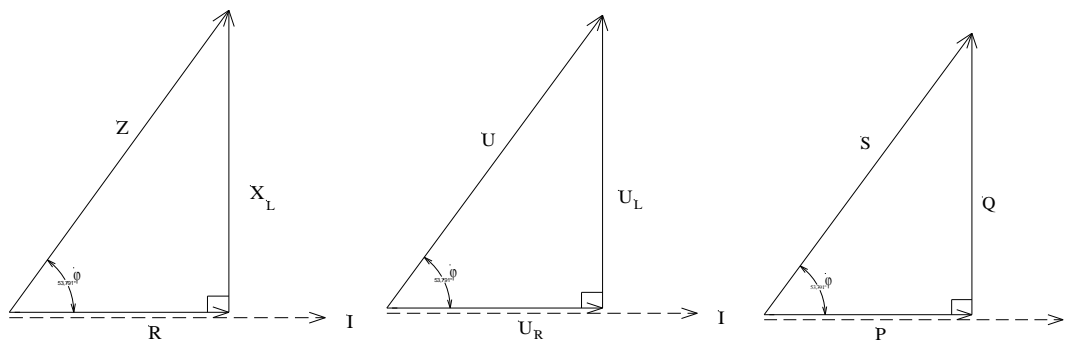


Figur 7.2.6

Impedanstrekant:

Spennings trekant:

Effekttrekant:



Vektorer i samme retning, men fra forskjellige trekanter har samme forhold. Dette medfører at vinklene i alle trekantene tilhørende samme ikke ideelle spole er like. Vinkelen  $\varphi$  er lik for alle trekantene til samme spole.

Eksempler på kombinasjoner:

$$U = I \cdot Z$$

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

De to første formlene er kjente formler hvor vi benytter vektorer med samme retning. Den siste formelen benytter vektorer med forskjellige retninger men da er også vinkelen  $\varphi$  tatt med i formelen.

**Strømmen i seriekopling er lik i hele seriekoplingen og den kan da benyttes i alle trekantene uten å tenke på vinkelen.**

For parallellkopling er det spenningen som er lik i hele koplingen. Da blir spenningstrekanten byttet ut med strømtrekant. Eksempel på strømtrekant har vi i en ikke-ideell kondensator.

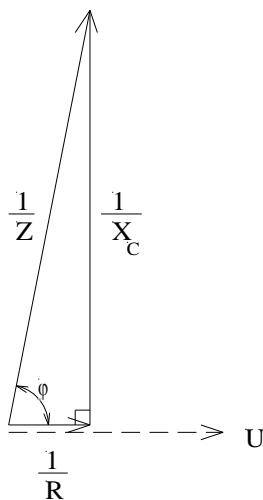
## SAMMENHENG MELLOM IMPEDANS, SPENNING OG EFFEKTTREKANTENE FOR EN IKKE IDEELL KONDENSATOR

Figur 7.2.3 viser effektkurvene for en ikke ideell spole. For en ikke ideell kondensator vil strøm og spenningskurve bytte plass fordi strømmen kommer før spenningen. Kurven for reaktiv effekt blir lik som i figur 7.2.3 med et unntak, den reaktive effekten blir forskjøvet  $180^\circ$ .

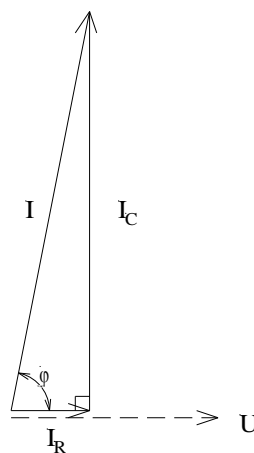
For en ikke ideell kondensator får vi følgende trekant:

Figur 7.2.7

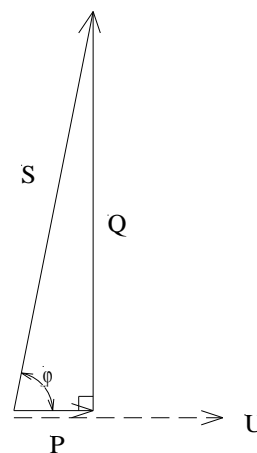
Impedanstrekant:



Strømtrekant:



Effekttrekant:



Vektorer i samme retning, men fra forskjellige trekantene har samme forhold. Dette medfører at vinklene i alle trekantene tilhørende samme ikke ideelle kondensator er like. Vinkelen  $\phi$  er lik for alle trekantene til samme kondensator.

## Eksempel 7.2.1

En ikke ideell spole har en aktiv effektdel på 150 W og en reaktiv effektdel på 800 W.

- Hva blir tilsynelatende effekt og effektfaktoren (faseforskyvningsvinkelen)?
- Spolen blir påtrykt en spenning på 230 V. Finn de teoretiske spenningsfallene over resistansdelen og reaktansdelen av spolen.
- Hva blir spolens impedans, resistans og reaktans?

Løsning:

- Tilsynelatende effekt og effektfaktor:

$$\bar{S} = P + jQ = 150W + j800VA = \underline{\underline{813,9VA \angle 79,4^\circ}}$$

- Spenningsfallene:

$$\bar{U} = U \angle \varphi = 230V \angle 79,4^\circ = \underline{\underline{42,4V + j226V}} \quad U_R = \underline{\underline{42,4V}} \quad U_L = \underline{\underline{226V}}$$

- Impedansen, resistansen og reaktansen:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi} = \frac{150W}{230V \cdot \cos 79,4^\circ} = \underline{\underline{3,55A}}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{230V}{3,55A} = \underline{\underline{64,9\Omega}}$$

$$\bar{Z} = Z \angle \varphi = 64,9\Omega \angle 79,4^\circ = \underline{\underline{11,9\Omega + j63,8\Omega}} \quad R = \underline{\underline{11,9\Omega}} \quad X_L = \underline{\underline{63,8\Omega}}$$

**OPPGAVER**

## 7.2.1

Hvilken effekt utvikler en resistans på  $100 \Omega$  når den blir tilkopleet en vekselspanning på  $235 \text{ V}$ ?

## 7.2.2

Hvor stor reaktiv effekt utvikler en ideell spole på  $314 \text{ mH}$  som blir tilkopleet  $200 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$ ?

## 7.2.3

Finn den reaktive effekten til en ideell kondensator på  $62,8 \mu\text{F}$  som blir tilkopleet en vekselspanning på  $400 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$ .

## 7.2.4

En ikke-ideell spole blir tilkopleet en vekselspanning på  $230 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$ . Spolen har en resistansdel på  $2 \Omega$  og en selvinduktansdel på  $32,2 \text{ mH}$ .

- Finn impedansen og faseforskyvningsvinkelen til spolen. Bruk kompleks regning.
- Hvor stor er strømmen gjennom spolen?
- Beregn aktiv, reaktiv og tilsynelatende effekt. Bruk kompleks regning.
- Hvilket arbeid utfører spolen i 1 minutt.

## 7.2.5

En spole med resistans  $10 \Omega$  og selvinduktans  $191,0 \text{ mH}$  blir tilkopleet en vekselspanning på  $400 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$ . Finn alle effektene som spolen utvikler samt faseforskyvningsvinkelen.

## 7.2.6

En spole med resistans  $10 \Omega$  og selvinduktans  $265,3 \text{ mH}$  blir tilkopleet en vekselspanning på  $440 \text{ V}$ ,  $60 \text{ Hz}$ .

- Finn impedansen og faseforskyvningsvinkelen til spolen. Bruk kompleks regning.
- Hvor stor er strømmen gjennom spolen?
- Finn de teoretiske spenningene over resistansdelen og den induktive delen av spolen. Bruk kompleks regning.
- Beregn aktiv, reaktiv og tilsynelatende effekt samt faseforskyvningsvinkel. Bruk kompleks regning.
- Tegn i målestokk impedanstrekant, spenningstrekant og effekttrekant.

## 7.2.7

En ikke-ideell spole blir tilkopleet en vekselspanning på  $230 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$ . Spolen har en resistansdel på  $8 \Omega$  og en selvinduktansdel på  $159,2 \text{ mH}$ . Tegn i målestokkstrøm -og spenningskurve med målepkt for hver  $30$ . grad i en periode. Tegn i samme diagram effektkurven med målepkt for hver  $30$ . grad. Tegn de tre trekantene etter effektivverdiene.

## 7.2.8

I en spole måles den aktive effekten til  $6250 \text{ W}$  og resistansen til  $10 \Omega$ . Hva blir den teoretiske spenningen over resistansdelen?

## 7.2.9

Hva blir tilsynelatende effekt og faseforskyvningsvinkel for en spole når vi har uttrykket:

$$200W + j2800VAr$$

## 7.2.10

En enfase generator er påstemplet  $10 \text{ kVA}$  ved  $110 \text{ V}$  og  $\cos\phi=0,78$  samt  $\eta=0,9$ .

- Hva er strømmen generatoren leverer ved maksimal belastning?
- Finn aktiv -og reaktiv effekt ved maksimal belastning.
- Hvilke teoretiske spenninger oppstår i generatoren?
- Finn generatorens resistans og reaktans.
- Hvilken effekt blir tilført generatoren?

## 7.2.11

Til en spole med spenning 220 V har vi følgende uttrykk:

$$200W + j2000VAR$$

Finn frekvensen spolen er tilknyttet, når den ideelle selvinduktansdelen er 300 mH.

### 7.2.12

En spole har en strøm og en spenning etter formelen:

$$u = 311,13V \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50Hz \cdot t + \frac{\pi}{3}) \quad \text{og} \quad i = 21,21A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50Hz \cdot t)$$

- Hva blir faseforskyvningsvinkelen i grader?
- Beregn impedansen, resistansen og reaktansen i spolen.
- Hva blir de teoretiske spenningsfallende i spolen?
- Finn aktiv, reaktiv -og tilsynelatende effekt.
- Hva blir strøm og spenning etter 2,5 ms?

### 7.2.13

Hvor mange grader er det mellom induktiv reaktans i en ideell spole og kapasitiv reaktans i en ideell kondensator.

### 7.2.14

For en spole har vi disse verdier ved 230 V, 50 Hz:

$$\bar{S} = 3,0kVA \angle 78,5^\circ$$

- Beregn aktiv -og reaktiv effekt.
- Finn effektfaktoren for spolen?
- Hva blir strømmen som går i spolen?
- Finn resistansen og reaktansen til spolen.